Durée : 3 heures

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

L'usage des calculatrices de poche est autorisé et recommandé.

Les candidats sont priés d'indiquer la marque et le modèle de leur machine et de préciser si elle est programmable.

Les algorithmes demandés seront donnés sous l'une des formes suivantes :

— une description informelle, mais non ambiguë;

— un organigramme;

— un programme BASIC;

— une procédure PASCAL.

I

Cette première partie concerne les problèmes de conversion.

La *durée* est l'intervalle de tempe séparant deux instants. La *date* d'un instant est la durée écoulée depuis un instant fixe pris pour origine. L'*unité fondamentale de durée* est la seconde; les *unités dérivées* sont la minute, l'heure et le jour.

1° Considérons une durée exprimée sous la forme sexagésimale D = j.hh.mm.ss, où j est un entier relatif, hh un entier compris entre 0 et 23 (écrit 00, 01, ..., 23) et de manière analogue mm et ss deux entiers compris entre 00 et 59.

Décrire de manière précise un algorithme permettant d'exprimer D comme un nombre entier de secondes, ou un nombre décimal de jours. Décrire aussi les algorithmes effectuant les opérations inverses : traduire sous la forme sexagésimale une durée exprimée en secondes ou en jours. Enfin, décrire un algorithme pour l'addition des nombres sexagésimaux.

2° *Application numérique.* — Sous forme sexagésimale :

l'année solaire	A = 365.05.48.46;
la lunaison moyenne	L = 29.12.44.03.

Traduire ces données en secondes et en jours. La révolution périodique de la Lune L_p satisfait à la relation

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L} + \frac{1}{A} \qquad (1)$$

On donnera L_p sous les trois formes (secondes, jours, sexagésimale). Pour ces calculs, on discutera la précision à donner aux valeurs intermédiaires, et on indiquera le détail des opérations.

3° De manière analogue, les angles s'expriment sous la forme sexagésimale d.mm.ss, où d, mm, ss sont des entiers, mm et ss étant compris entre 00 et 59. Donner l'algorithme de conversion en multiples décimaux du degré, ainsi que l'algorithme inverse.

Avec quelle précision faut-il donner π pour calculer le radian sous la forme sexagésimale ? Faire le calcul effectif.

4° En astronomie, on a souvent à considérer des mouvements angulaires uniformes, où un tour complet de 360° est effectué en un jour. Donner l'algorithme qui permet de convertir une durée (inférieure à un jour) exprimée sous la forme sexagésimale en un angle exprimé sous la forme sexagésimale, ainsi que l'algorithme inverse.

5° *Application numérique.* — Le Soleil moyen est un astre fictif qui parcourt à vitesse constante en une année A un cercle autour de la terre; la lune moyenne décrit un cercle concentrique dans le même plan et le même sens que le Soleil, en une révolution périodique L_p. Calculer, sous forme décimale et sous forme sexagésimale, l'angle dont chacun de ces astres avance en une heure et en un jour. De la relation (1), déduire la signification de la lunaison moyenne L.

II

1° Soit n un entier strictement positif. Pour tout entier a, on note mod (a, n) l'unique entier b satisfaisant aux relations : $1 \leqslant b \leqslant n$, $a - b$ est divisible par n. Indiquer comment calculer mod $(a + a', n)$ et mod (aa', n) en fonction de mod (a, n) et mod (a', n).

Application. — Donner sous forme de tableau la table d'addition et la table de multiplication des entiers modulo 7.

2° Dans *l'ère julienne*, l'année numérotée 1 est liée de manière conventionnelle à la naissance de Jésus.

À l'année numéro N, on associe

le *cycle dominical* C_D : un entier modulo 28,

le *cycle lunaire* C_L : un entier modulo 19,

l'*indiction romaine* I : un entier modulo 15.

Ces nombres progressent d'une unité chaque année, et pour l'année 1, on a les valeurs

$$C_D = 10, \quad C_L = 2, \quad I = 4.$$

Donner les formules exprimant C_D, C_L, I en fonction de N par utilisation de la fonction mod (a, n). Montrer que ces trois fonctions ont une plus petite période commune, que l'on calculera.

Déterminer le numéro de l'année la plus proche de nous, située avant le début de l'ère julienne et pour laquelle les nombres C_D, C_L, I sont égaux à 1. Elle est prise pour année numéro 1 de l'*ère astronomique*. Donner la relation entre les numéros d'une année déterminée, N_J dans l'ère julienne et N_A dans l'ère astronomique.

3° Les années dont le numéro dans l'ère julienne est divisible par 4 sont appelées *bissextiles* et durent 366 jours, les autres sont appelées *ordinaires* et durent 365 jours.

Une date dans le calendrier julien est donnée sous la forme a.μμ.jj.hh.mm.ss avec la signification suivante :

a	: année, entier relatif;
μμ	: mois, entier de 01 à 12;
jj	: jour, entier de 01 à 31;
hh	: heure, entier de 00 à 23;
mm	: minute, entier de 00 à 59;
ss	: secondes, entier de 00 à 59.

L'origine de l'ère julienne est le premier janvier à 0 heure de l'année 0. Dans le calendrier astronomique, la date est donnée sous la forme du nombre décimal de jours écoulés depuis le premier janvier de l'année 0 de l'ère astronomique, à 0 heure.

Décrire les modes de conversion d'un de ces calendriers vers l'autre. En particulier, on explicitera le rang d'un jour μμ.jj de l'année, le premier janvier ayant le rang 0.

Tournez la page S. V. P.

E.N.S. ULM-SEVRES
Groupe A-Epreuve pratique
page 79

Tableau des mois

Numéro	Nom	Durée en jours
01.....	Janvier	31
02.....	Février	28 (ou 29)
03.....	Mars	31
04.....	Avril	30
05.....	Mai	31
06.....	Juin	30
07.....	Juillet	31
08.....	Août	31
09.....	Septembre	30
10.....	Octobre	31
11.....	Novembre	30
12.....	Décembre	31

4° On met en correspondance les entiers modulo 7 et les lettres romaines de A à G selon la table :

1 2 3 4 5 6 7
A B C D E F G .

À chaque année, on associe une ou deux *lettres dominicales* selon que l'année est ordinaire ou bissextile. On procède ainsi :

— On écrit la suite des 7 lettres dans l'ordre B A G F E D C.

— On répète cette suite indéfiniment pour obtenir la suite infinie

S = B A G F E D C B A G F E D C...

— On attribue successivement les lettres de rang 1, 2, 3 dans la suite S aux années ordinaires de numéro 1, 2, 3 dans l'ère julienne, puis les deux lettres suivantes à l'année bissextile 4.

— On recommence avec les lettres suivantes pour les années ordinaires 5, 6, 7 et l'année bissextile 8, etc.

Voici le début de la correspondance :

Année julienne.....1 2 3 4 5 6 7 8 ...
Lettre.....B A G FE D C B AG ...

a. Donner l'algorithme explicite qui calcule l'ensemble Δ des lettres dominicales en fonction du numéro N_A de l'année dans l'ère astronomique.

b. Exprimer la correspondance $N_A \longrightarrow \Delta$ au moyen de la fonction mod (a, n).

c. Montrer que les lettres dominicales ne dépendent que du cycle dominical C_D, et donner une table des valeurs de Δ en fonction de C_D.

d. Calculer les lettres dominicales des années suivantes :

315, 325, 987, 1453, 1492, 1515, 1582.

5° La *lettre dominicale* d'un jour d'une année ordinaire, exprimé sous la forme μμ.jj se détermine par les règles suivantes :

— le premier janvier a la lettre A;

— les lettres se succèdent dans l'ordre A B C D E F G A B C ...

Décrire l'algorithme explicite. On pourra montrer que la lettre dominicale se calcule au moyen de l'addition modulo 7 de deux quantités, l'une ne dépendant que de μμ et l'autre de jj.

6° Quelle est la correspondance entre la lettre dominicale d'une année ordinaire et le jour de la semaine correspondant au premier janvier de l'année (on fournit l'information que le premier janvier 1500 était un mercredi)? En déduire qu'une date a.μμ.jj (où l'année a est ordinaire) correspond à un dimanche si et seulement si la lettre dominicale de l'année a coïncide avec celle du jour μμ.jj.

7° On *code* les jours de la semaine par des entiers modulo 7 selon la correspondance :

Lundi	1	Jeudi	4	Dimanche	7
Mardi	2	Vendredi	5		
Mercredi	3	Samedi	6		

Démontrer que le jour correspondant à une date a.μμ.jj d'une année ordinaire a un code qui s'exprime sous la forme $f(a) + g(\mu\mu) + h(jj)$ d'une somme d'entiers modulo 7. On explicitera les fonctions f, g et h.

8° Pour une année bissextile, les jours autres que le 29 février se voient attribuer la même lettre dominicale qu'au 5°. Reprendre pour les années bissextiles les questions étudiées au 6° et 7°.

III

La *réforme* grégorienne du calendrier repose sur les règles suivantes :

a. On utilise le calendrier julien jusqu'au jeudi 4 octobre 1582 inclus;

b. Le jour suivant s'appelle vendredi 15 octobre 1582;

c. Les années après 1582 dont le numéro N_J dans l'ère julienne est divisible par 100 mais non par 400 sont ordinaires et non bissextiles. Pour les autres années la règle est inchangée.

1° On considère un instant t dont la date dans le calendrier grégorien est donnée sous la forme : D = a.μμ.jj.hh.mm.ss; soit t' l'instant dont la date dans le calendrier julien est égale à D. On appelle « équation solaire » la correction $E(t) = t' - t$. Déterminer la fonction $t \longrightarrow E(t)$ et montrer comment utiliser cette fonction pour déterminer en fonction de D le nombre de jours écoulés entre l'origine de l'ère astronomique et l'instant t.

2° *Application numérique.* — Indiquer la date du début de cette épreuve dans le calendrier grégorien (qui est le calendrier usuel) et donner la date correspondante dans le calendrier astronomique (comptée en jours). On tiendra compte du fait que l'heure légale avance de deux heures sur le temps universel pris comme référence par les astronomes.

3° La détermination de la lettre dominicale d'un jour d'une année ordinaire est inchangée. Définir la lettre dominicale d'une année qui porte le numéro N_G dans le calendrier grégorien de sorte que la règle des dimanches énoncée en II, 6° reste valable. Montrer que cette lettre dominicale ne dépend que de mod $(N_G, 400)$.

4° Vérifier que le 4 octobre 1582 était un jeudi et que la lettre dominicale de 1582 était G dans le calendrier julien. Expliquer pourquoi elle a été modifiée en C à partir du 15 octobre 1582.

5° Les jours fériés fixes en France sont les suivants : 1er janvier, 1er mai, 8 mai, 14 juillet, 15 août, 1er novembre, 11 novembre et 25 décembre. Calculer les jours de la semaine correspondant à ces dates pour les années 1900, 1988 et 2000.

IV

1° À quelle valeur moyenne de l'année correspondent les règles du calendrier julien? Question analogue pour le calendrier grégorien? Compte tenu de la valeur de l'année solaire donnée en I, 2°, y a-t-il lieu d'envisager de nouvelles modifications du régime des années bissextiles?

2° Donner un commentaire mathématique succinct du vers célèbre de Gérard de Nerval :

La treizième revient, c'est encor la première. (*)

(*) Voir page 265

page 80
E.N.S. ULM-SEVRES
Groupe A-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail